Zdrahat, S. H. (2024). Zarubizhnyi pohliad na evaliuatsiiu ta yii pryznachennia. *VI Vseukrainska naukovo-praktychna konferentsiia «Pedahohichna nauka i osvita u suchasnomu vymiri: problemy i perspektyvy rozvytku»* (s. 46-51). Odesa: Bukaiev V. V. URL: https://dspace.oano.od.ua/items/c43adeb9-4767-4881-a8a5-a155e5f4d143

Tolvinska-Krulikovska, E. (Red.). (2010). Otsiniuvannia v shkoli. Varshava: ORO

Yakymchuk O. (2020). Kompetentisnyi pidkhid v osviti: ukrainski realii. Vyshcha osvita Ukrainy, № 3, s 19-25 (21).

Svitlana Zdragat
Candidate of Sociological Sciences,
Senior Lecturer of the Department of Philosophy of Education
Odessa Regional Academy of In-Service Education,
Odesa, Ukraine
https://orcid.org/0000-0002-2574-1927
s.zdragat@gmail.com

COMPETENCE-BASED APPROACH IN EDUCATION: A RESOURCE OF EVOLUTION

Abstract. *The article substantiates the actual aspects of the formation of a competence-based approach to education on the basis of the use of evaluation research, considers new evaluation tools based on modern achievements in the theory of pedagogical dimensions using a wide range of evaluation tools,*

Key words: *evaluation, evaluation research, competence-based approach, assessment, evaluation research.*

Дата надходження до редакції 28.10.2024

УДК [373.5.016:51]:378.046.4:514.116.2

Мітельман Ігор Михайлович,
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри методики викладання і змісту освіти
КЗВО «Одеська академія неперервної освіти Одеської обласної ради»,
м. Одеса, Україна
https://orcid.org/0000-0002-9817-6690

ДИДАКТИКО-МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ ТРИГОНОМЕТРИЧНОЇ ІНТЕРПРЕТАЦІЇ ДЕЯКИХ ТИПІВ АЛГЕБРАЇЧНИХ ЗАДАЧ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

Анотація. *Упровадження в Новій українській школі академічної профілізації на основі поглибленого вивчення математики в старших класах визначається потребами держави та суспільства в інтенсифікації освітньої траєкторії обдарованих учнів у галузі математики та її застосувань. Цілісність профільного вивчення математики на поглибленому рівні обумовлює об’єднання фундаменталізації та професіоналізації освіти в єдиний процес генералізації знань – концентрації навчального матеріалу й дидактико-методичного ресурсу навколо ключових теоретичних розділів і системи навчання розв’язування задач. Виходячи із необхідности узгодження всіх складників ієрархії, систематизації та добору змісту навчання в закладах загальної середньої освіти, під час підготовки майбутніх учителів математики, неперервної (післядипломної) освіти вчителів, обґрунтовується особливий статус тригонометричного матеріалу, його великий пізнавальний та розвивальний потенціал. Водночас, ми відзначаємо зниження рівня знань з тригонометрії випускників шкіл, недостатню мотивацію з його опанування навіть в учнів класів з поглибленим вивченням математики, слухачів факультативів і математичних гуртків. Досвід роботи з учителями на курсах підвищення кваліфікації, аналіз рівня підготовки студентів математичних спеціальностей закладів вищої педагогічної освіти також вказують на відповідні методичні проблеми.*

У статті висвітлюється підхід до виокремлення, актуалізації, уточнення, координації продуктивних предметно-методичних ідей і зв’язків деяких типів алгебраїчних задач олімпіадного та/або ускладненого рівня, що за своєю структурною специфікою допускають тригонометричну інтерпретацію (рівняння й системи рівнянь, задачі на доведення нерівностей тощо). Розширюються й доповнюються існуючі дидактичні комплекси з цієї тематики для підсилення позитивного освітнього результату – активізації *набутих учнями сукупних компетентностей із синхронізації всіх змістових ліній шкільної програми з математики. Результати статті сприяють модернізації математичного й методичного середовища підготовки обдарованих учнів, зростанню творчого потенціалу працюючих і майбутніх учителів математики.*

***Ключові слова**: методика навчання математики, підвищення кваліфікації вчителів, математично обдаровані учні, олімпіадні та ускладнені алгебраїчні задачі, вивчення тригонометрія в школі, фундаменталізація та професіоналізація змісту освіти, профілізація в Новій українській школі.*

Постановка проблеми. Трансформація компетентнісного потенціалу вчителя математики визначається динамікою змін вимог держави й суспільства щодо ефективності всіх рівнів загальної середньої освіти та нормативно закріплюється в Концепції реалізації державної політики у сфері реформування загальної середньої освіти «Нова українська школа» на період до 2029 року, схваленої розпорядженням Кабінету Міністрів України від 14 грудня 2016 року № 988-р, та, відповідно, у Професійному стандарті «Вчитель закладу загальної середньої освіти», затвердженому наказом Міністерства освіти і науки України від 29 серпня 2024 року № 1225 (*далі – Професійний стандарт*), Державному стандарті базової середньої освіти, затвердженому постановою Кабінету Міністрів України від 30 вересня 2024 року № 898, Державному стандарті профільної середньої освіти, затвердженому постановою Кабінету Міністрів України від 25 липня 2024 року № 851 (*далі – Державний стандарт ПСО*).

Метою профільної середньої освіти є розвиток здобувача освіти на базі наукового світогляду, а серед її ціннісних орієнтирів – підтримка пізнавального інтересу і наполегливості, усвідомлення важливості розвитку продуктивного мислення. Профілізація старшої школи спрямована на пріоритетні потреби держави у сталому відворюванні науково-технічного кадрового потенціалу високої якості. Профільна середня освіта операціонально ґрунтується на парадигмі рівневої диференціації, закладеній базовою школою. При цьому єдність профільної та рівневої диференціації повинна створити найбільш сприятливі умови (адаптацію освітнього процесу до рівнів навченості, об’єктивованих здібностей, особливостей мисленнєвої, вольової, емоційної сфер особистості учня) для досягнення учнями максимально можливого засвоєння навчального матеріалу – особливо на поглибленому рівні, передбаченому орієнтирами для оцінювання. Відтак, Державний стандарт ПСО визначає два спрямування здобуття профільної середньої освіти: академічне й професійне. У контексті сфокусованості на стратегічній ролі математики як шкільного навчального предмета, що торує інтенсивну освітню траєкторію учня на шляху до сучасної вищої математичної освіти, застосування та створення математичних методів в інших наукових галузях і сферах високих технологій, виділимо саме **академічну профілізацію на основі поглибленого навчання / вивчення математики** в 10–11(12) класах старшої школи.

Перехід старшої школи на профільну платформу є вузловим кроком модернізації системи освіти, яка, згідно з Національною доктриною розвитку освіти, затвердженою Указом Президента України від 17 квітня 2002 року № 347/2002, відбувається на основі її *фундаменталізації* у вимірі Болонського процесу (спеціальний меморандум ЮНЕСКО, 1994 р.). С. Гончаренко, М. Ковтонюк, Г. Васьківська та інші дослідники розглядали принцип фундаменталізації освітнього процесу в статусі універсальної дидактичної категорії, на якій базується сучасна українська освіта (Гончаренко, 2008a, 2008b). Поряд із гуманізацією освіти (підкреслимо, що її необхідною умовою є диференціація освітнього процесу), науковістю та систематичністю навчання, фундаменталізація виступає формувальним чинником змісту освіти, відбору змісту, її дидактико-методичного ресурсу (див. також (Захарчук, 2015)). У математичній освітній галузі реалізація цього принципу на різних освітніх рівнях, етапах здобуття освіти, під час спеціалізації та самоосвіти протягом життя задіює всю палітру педагогіки математики (зрозуміло, що це притаманне й іншим предметним галузям). Профільне вивчення математики на поглибленому рівні, прагнення зорієнтувати значну частину математично обдарованих учнів, учасників інтелектуальних змагань на подальший вибір вищої освіти з математичним ядром обумовлює фундаменталізацію освіти у нерозривному зв’язку з обсягом наукових знань у контексті її *професіоналізації*. І тому професіоналізацію освіти необхідно розглядати як з точки зору забезпечення належного рівня підготовки майбутніх учителів математиків та їх післядипломної (неперервної) освіти (Задоріна та ін., 2022), так і з позицій розвитку спеціалізованих математичних компетентностей та освітньо-професійного треку учнів в умовах профілізації старших класів Нової української школи. Українські й зарубіжні вчені активно розвивають підходи щодо об’єднання фундаменталізації та професіоналізації освіти в єдиний процес *генералізації* знань – концентрації навчального матеріалу й дидактико-методичного ресурсу на основі принципу цілісності навколо ключових теоретичних розділів і системи навчання розв’язування задач. Вважаємо, що для профільного поглибленого вивчення математики в старшій школі, додаткової освіти математично обдарованих учнів актуальними залишаються висновки І. Лов’янової та Д. Бобилєва (2015) про розуміння спрямованого навчання через орієнтацію змісту, форм, методів навчання математики на формування таких професійних якостей особистості, в яких знаходять своє відображення спеціальні математичні компетентності. Хоча ці висновки були зроблені на «локальному» підґрунті одного з фундаментальних математичних курсів, які викладаються майбутнім учителям математики, аналіз сукупності педагогічних умов, що забезпечують ефективність упровадження ідей, схем і технологій професійно спрямованого навчання математичних дисциплін та їхніх окремих розділів (тем) є релевантними для завдань, котрі має вирішувати профілізація старшої школи і, відповідно, система підвищення кваліфікації та неперервної педагогічної освіти як освітньо-професійне середовище сучасного вчителя математики.

Утілення дидактичних концепцій залежить від узгодженості всіх освітніх компонентів у питаннях вибудови ієрархії, систематизації та добору змісту освіти (шкільної освіти, усіх рівнів педагогічної освіти) для забезпечення оптимального навчання математики. У зв’язку з цим особливий статус тригонометричного матеріалу виділявся в багатьох дисертаційних дослідженнях, численних статтях наукового та методичного характеру, навчально-методичних посібниках тощо. На відміну від класичних методичних традицій, сьогодні в базовій школі елементи тригонометрії реалізуються в статусі суто геометричного інструментарію в курсі планіметрії (8–9 класи). Різноманіття тригонометричних формул та специфічні прийоми перетворення тригонометричних виразів (що раніше розглядалось у 9 класі), властивості й графіки тригонометричних функцій, методи розв’язування рівнянь і нерівностей – усе це перенесено до старшої школи в якості одного із системоутворювальних джерел усіх без винятків змістових ліній програми математичної освіти. Незважаючи на унікальний вітчизняний досвід викладання тригонометричного матеріалу, наявність необхідної обширної літератури для вчителів і учнів, ми спостерігаємо неухильне зниження рівня знань з тригонометрії випускників шкіл, недостатню мотивацію з опанування цього матеріалу навіть в учнів класів з поглибленим вивченням математики, слухачів факультативів і математичних гуртків. Слід звернути увагу й на те, що досвід роботи з учителями на курсах підвищення кваліфікації, аналіз рівня підготовки студентів і випускників останніх років математичних спеціальностей закладів вищої педагогічної освіти вказують на методичні проблеми з організації навчання тригонометрії з урахуванням індивідуальних пізнавальних запитів, здібностей учнів профільних математичних класів. Ми можемо стверджувати, що актуальною залишається проблема подолання протиріч між домінуючими екстенсивними формально-алгоритмічними методичними підходами до викладання тригонометричного матеріалу та його величезним розвивальним потенціалом, індикатором якого є розв’язування нестандартних задач підвищеного рівня складності, якість підготовки до математичних олімпіад різного рівня. Такі протиріччя є щільно пов’язаними з протиріччями між пізнавальною диференціацією учнів профільних класів з поглибленим вивченням математики й обмеженими реальними можливостями її повноцінного врахування в процесі навчання математики.

Норми Професійного стандарту, закладені у предметно-методичному сегменті **А2** структури компетентностей учителя, переконливо орієнтують на те, що дослідження й розвинення дидактико-методичних технологій, стратегій, інструментів у сфері педагогіки математики повинні ґрунтуватись на розумінні комплексної сутності компетентнісного підходу – нерозривної єдності спеціалізованої математичної (предметної) компетентності та методичної компетентності, яка відображає сутність профілізації старшої школи. Творче засвоєння та інтерпретація математичних знань є абсолютно неможливими без такої парадигми процесу «навчання-вчення», в якому «учні активно створюють розуміння впродовж того, як вони приймають усе більш суттєву участь у відтворенні сталих математичних практик» (*Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms,* 2000, с. 21). Функція вчителя математики мусить змінитись з пасивного формату «показ і розповідь» на оперативне керівництво процесами мислення, таку підтримку мисленнєвих побудов слухачів, яка розвиває індивідуальне мислення, навички інтелектуальної комунікації, призводить до обґрунтованого математичного розуміння на основі аналізу, синтезу, дедуктивних та індуктивних схем мислення (Задоріна та ін., 2024).

Постійне наповнення, оновлення й осмислення дидактико-методичного ресурсу окремих розділів (тем, задачних «лінійок» і т. д.) курсу математики (у тому числі на рівні факультативної, гурткової, індивідуальної роботи з академічно обдарованими учнями) – особливо таких, без перебільшення, магістральних і визначальних, як тригонометрія, – повинно вважатись важливим і перспективним простором для наукових розвідок. Ми дотримуємось формату створення компактних продуктивних згорнутих дидактичних комплексів-структур «теорія-задачі» на базі генезису та перенесення тези С. Семенця про принципи розвивальної наступності, формувальної задачної природи цілісності навчально-математичної діяльності та розвитку математичних здібностей учнів на рівень синхронізації зон найближчого математичного розвитку різних категорій здобувачів освіти (неперервної освіти) й відповідних зон фахового предметно-методичного компетентнісного розвитку вчителя, зокрема – у контексті інституціонального підвищення кваліфікації (Мітельман, 2022; Мітельман, 2023а; Семенець, 2006; Семенець, 2016).

Аналіз попередніх досліджень і публікацій. Особливості викладання тригонометрії на різних етапах і рівнях шкільної математичної освіти, питання теорії і практики розв'язування основних типів задач з тригонометрії (у тому числі й олімпіадних та ускладнених задач) докладно висвітлюються в роботах багатьох вітчизняних і зарубіжних науковців та вчителів-практиків, викладачів математичних спеціальностей педагогічних університетів, фахівців у галузі роботи з математично обдарованими учнями.

Серед українських дослідників, чий доробок значно вплинув на методику навчання тригонометрії в школі, зміст відповідних розділів шкільних підручників, посібників для вчителів і студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів назвемо Г. Бевза, І. Житарюка, Т. Колесник, Г. Михаліна, В. Моторіну, Є. Неліна, З. Слєпкань, М. Шкіля, Н. Шунду.

Широкий спектр задач з тригонометрії і методів їх розв'язування представлено в посібниках (Барановська & Ясінський, 1999), (Гайштут & Ушаков, 1997), (Карпенко, 2016), (Конет, 2006), (Кузьменко, 2016), (Кушнір, 2006) та ін. Вагомим внеском до розглядуваної тематики є посібник (Мерзляк та ін., 2008), який дає вчителю дидактико-методичний ресурс та інструментарій для диференційованого навчання курсу тригонометрії майже в усіх його складниках.

Сучасний стан стратегій та методичних особливостей навчання тригонометрії висвітлювали Т. Бондаренко, Н. Борисова і В. Шаповалова, О. Смолярчук та інші автори.

Виділимо дисертаційне дослідження Т. Грицик (2010), в якому на основі концепції інтеграції рівневої та профільної диференціації навчання здійснюється докладний аналіз і моделювання диференційованого вивчення тригонометричного матеріалу в курсі математики профільної школи, спрямованого на особистісний розвиток учнів, їх залучення до навчально-пізнавальної діяльності відповідно до різних рівнів соціального замовлення шкільній математичній освіті. Питання методики викладання тригонометрії в профільній школі розглядали також В. Роговський, В. Коберник.

Олімпіадні задачі тригонометричного змісту представлено в збірниках завдань національних і міжнародних олімпіад, інших математичних змагань, побудованих за традиційним принципом *прецедентних класифікаторів*. Джерела такого типу мають, насамперед, довідково-допоміжний характер: вони дозволяють учням оцінювати власний рівень підготовки, учителям – поповнювати «банки» задач для проведення занять тощо. Але оскільки ці добірки здебільшого не містять навчально-методичної складової, то наведення навіть повних розв'язань і відповідей вимагає цільового логіко-дидактичного аналізу з боку вчителя. Зауважимо, що практику застосування тригонометричних підходів до розв'язування багатьох різнопланових олімпіадних задач найвищого рівня складності та контури навчання цього обдарованих учнів під час їх підготовки до олімпіад систематизовували та описували, зокрема, T. Andreescu і Z. Feng (2005).

Корисні методичні принципи й орієнтири щодо застосування тригонометрії до розв'язування задач з алгебри, значну кількість розібраних прикладів, завдань для самостійного розв'язування містять статті В. Якиляшека (2001) і Н. Третяк (2011), названий вище посібник (Мерзляк та ін., 2008). Також для запропонованої статті важливе значення має робота (Ясінський, 2008), в якій докладно розглянуто методику й техніку тригонометричних доведень олімпіадних алгебраїчних нерівностей з додатковими обмеженнями та наведено чимало задач з матеріалів авторитетних математичних олімпіад.

Мета статті. Розв'язування й дослідження нестандартних рівнянь, систем рівнянь, нерівностей, доведення нерівностей є надзвичайно важливим компонентом теоретичного та практичного профільного (поглибленого) вивчення математики в базовій і старшій школі, підготовки учнів до математичних змагань. Особливої методичної уваги потребують задачі, формальна постановка яких зовнішньо не є безпосередньо пов'язаною з математичними джерелами їх виникнення та розв'язування. Стаття ставить за мету виокремлення, актуалізацію, координацію методично значущих ідей і зв'язків деяких типів алгебраїчних задач олімпіадного та/або ускладненого рівня, що за своєю структурною специфікою допускають тригонометричне «тлумачення». А також ми прагнемо розширити й доповнити існуючі дидактичні комплекси з цієї тематики для підсилення позитивного освітнього результату – активізації набутих учнями сукупних математичних компетентностей із синхронізації всіх п'ятьох змістових ліній шкільної математики, зростання творчого потенціалу вчителів математики, постійного оновлення змісту підвищення їхньої кваліфікації.

Виклад основного матеріалу дослідження. Подання виразів, змінних, чисел, невідомих величин як значень тригонометричних функцій – з урахуванням алгебраїчної структури задачі та обмежень, що диктуються її умовою, – є добре відомим підходом до тригонометричної трансформації задачі. З іншого боку, тригонометрія в сучасному розумінні втрачає математичну (не методичну!) суб'єктність і фактично може органічно розглядатись як суто операційна реалізація «алгебри» на одиничному колі, заданому рівнянням $x^2 + y^2 = 1$. Це, на нашу думку, було однією з причин позбавлення тригонометрії статусу окремої шкільної математичної дисципліни та повної її інтеграції в курс алгебри (введення тригонометричних функцій кутів з проміжку $(0°; 180°)$, зрозуміло, залишилось у зоні відповідальності геометрії). Таке «розчинення» тригонометрії в курсі алгебри, можливо, і сприяло зближенню технік перетворення алгебраїчних і тригонометричних виразів, технік розв'язування рівнянь, нерівностей і систем, покращило розуміння властивостей і графіків тригонометричних функцій у середовищі інших функцій із шкільної програми тощо, але не вплинуло на розвиток суто алгебраїчного мислення, фантазії та винахідливості як учителів, так і учнів.

Керуючись ключовою категорією *робочого продукту* методології і цінностей *agile* (Manifesto for Agile Software Development, 2001, http://agilemanifesto.org/), ми мусимо створювати належний математичний і дидактико-методичний контент спеціальних тематичних задачних ланцюжків та/або блоків для адаптованого використання вчителями в роботі та в якості елементів стратегії лекційної та практичної роботи зі слухачами курсів підвищення кваліфікації. Вважаємо, що це якнайкраще відповідає принципам архітектури програм підвищення кваліфікації Одеської академії неперервної освіти (Мітельман, 2023b), які ставлять за мету в чіткій формі оперативно надати вчителям компактну, збалансовану систему знань з обраної теми – робочий продукт у розумінні цінностей agile. Збалансованість має враховувати як перспективу для учнів засвоїти нові знання, отримані вчителем під час проходження курсів, так і необхідність постійно поповнювати обсяг знань самих учителів, сформований під час вивчення фундаментальних і спеціальних математичних дисциплін у закладах вищої освіти і затребуваний під час їхньої педагогічної діяльності в закладах загальної середньої освіти різних типів (особливо, коли йдеться про навчання обдарованих учнів). Виходячи з цієї проблеми, пропонуємо таку систему задач, яка удосконалить методику навчання застосування тригонометричного переформатовування для деяких типів задач з алгебри.

Задача 1. Доведіть, що для всіх $x \in [-1; 1]$ і $y \in [-1; 1]$ виконується нерівність $xy + x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} \le \sqrt{2}$. (1.1)

Розв'язання. Оскільки $xy + x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \le \left|xy + x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right| \le |x||y| + |x|\sqrt{1-y^2} + |y|\sqrt{1-x^2}$, то можна вважати, що $0 \le x \le 1$ і $0 \le y \le 1$. Покладемо $x = \cos\alpha$, $y = \cos\beta$, $\alpha \in [0; \pi/2]$, $\beta \in [0; \pi/2]$. Тоді ліва частина нерівності (1.1) набуде вигляду $\cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta + \cos\beta\sin\alpha - \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+\beta)$. Але ж $\cos t + \sin t = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right) \le \sqrt{2}$. ■

Зауваження. Фактично ми знайшли точну верхню оцінку виразу з лівої частини нерівності, бо значення $\sqrt{2}$, очевидно, досягається. Задачу можна пропонувати як задачу на знаходження найбільшого можливого значення цього виразу.

Задача 2. Доведіть, що для всіх $x \in [-1; 1]$ і $y \in [-1; 1]$ виконується нерівність $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} \le 2\sqrt{1-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}$. (2.1)

Розв'язання. Звернемо увагу на те, що $0 \le 1 - \left(\frac{|x|+|y|}{2}\right)^2 \le 1 - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$, і тому можна вважати, що $0 \le x \le 1$ і $0 \le y \le 1$. Покладемо $x = \cos\alpha$, $y = \cos\beta$, $\alpha \in [0; \pi/2]$, $\beta \in [0; \pi/2]$. Тоді нерівність (2.1) запишемо у вигляді

$$\sin\alpha + \sin\beta \le 2\sqrt{1-\left(\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{2}\right)^2},\ \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \le \sqrt{1-\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2},$$

$$\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} \le 1 - \cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2},\ \cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} \le 1. \ ■$$

Зауваження. Потрібний результат також демонструється опуклістю догори функції $f(t) = \sqrt{1-t^2}$, $t \in [-1; 1]$.

Задача 3. Відомо, що

$$\frac{1}{1+a^4} + \frac{1}{1+b^4} + \frac{1}{1+c^4} + \frac{1}{1+d^4} = 1. \ (3.1)$$

Доведіть, що $|abcd| \ge 3$.

Розв'язання. Без обмеження загальності можна вважати, що $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$. Зробимо заміну: $a^2 = \mathrm{tg}\alpha_1$, $b^2 = \mathrm{tg}\alpha_2$, $c^2 = \mathrm{tg}\alpha_3$, $d^2 = \mathrm{tg}\alpha_4$; $\alpha_i \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $1 \le i \le 4$. Тоді рівність (3.1) має вигляд $\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 + \cos^2\alpha_4 = 1$. Отже, використовуючи нерівність Коші, одержимо: $\sin^2\alpha_1 = 1 - \cos^2\alpha_1 = \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 + \cos^2\alpha_4 \ge 3\sqrt[3]{\cos^2\alpha_2 \cdot \cos^2\alpha_3 \cdot \cos^2\alpha_4}$ і ще три аналогічні нерівності. Перемножимо такі чотири нерівності і отримаємо: $\sin^2\alpha_1 \cdot \sin^2\alpha_2 \cdot \sin^2\alpha_3 \cdot \sin^2\alpha_4 \ge 81\cos^2\alpha_1 \cdot \cos^2\alpha_2 \cdot \cos^2\alpha_3 \cdot \cos^2\alpha_4$, $\mathrm{tg}^2\alpha_1 \cdot \mathrm{tg}^2\alpha_2 \cdot \mathrm{tg}^2\alpha_3 \cdot \mathrm{tg}^2\alpha_4 \ge 81$. ■

Задача 4 (Журнал «У світі математики», № 3, 2002 р.). Для $0 < a,\ b,\ c < \frac{1}{\sqrt{3}}$ доведіть нерівність

$$\frac{a+b}{1-ab}+\frac{b+c}{1-bc}+\frac{a+c}{1-ac} \le 2\cdot\frac{a+b+c-abc}{1-ab-bc-ac}. \ (4.1)$$

Розв'язання. Зробимо підстановку $a = \mathrm{tg}\alpha,\ b = \mathrm{tg}\beta,\ c = \mathrm{tg}\gamma,\ 0 < \alpha,\ \beta,\ \gamma < \frac{\pi}{6}$. Тоді нерівність (4.1) матиме вигляд $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)+\mathrm{tg}(\beta+\gamma)+\mathrm{tg}(\gamma+\alpha) \le 2\mathrm{tg}(\alpha+\beta+\gamma),\quad 0<\alpha+\beta+\gamma<\frac{\pi}{2}$. Розглянемо функцію $f(x) = \frac{\mathrm{tg}x}{x},\ x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Легко отримати, що $f'(x) > 0,\ x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, і тому функція f строго зростає на проміжку $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Відтак, $\frac{\mathrm{tg}(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta} \le \frac{\mathrm{tg}(\alpha+\beta+\gamma)}{\alpha+\beta+\gamma}$, $\mathrm{tg}(\alpha+\beta) \le \frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\cdot\mathrm{tg}(\alpha+\beta+\gamma)$. Запишемо ще дві аналогічні нерівності, додаванням яких одержимо потрібний результат. ■

Зауваження. Нескладно довести, що нерівність (4.1) залишається правильною й для $0 \le a,\ b,\ c < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Задача 5 (Південно-Корейська олімпіада, 1998 р.). Нехай для додатних чисел x, y і z виконується рівність $x+y+z = xyz$. (5.1) Доведіть, що

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \le \frac{3}{2}. \ (5.2)$$

Розв'язання. Рівність (5.1) має тригонометричний та геометричний зміст. Позначимо: $x = \mathrm{tg}\alpha, y = \mathrm{tg}\beta$, $z = \mathrm{tg}\gamma$, $0 < \alpha,\ \beta,\ \gamma < \frac{\pi}{2}$. Тоді $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\gamma = \mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta\cdot\mathrm{tg}\gamma$, $\mathrm{tg}\alpha(1-\mathrm{tg}\beta\mathrm{tg}\gamma) = -(\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\gamma)$. Оскільки $\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\gamma \neq 0$, то $1-\mathrm{tg}\beta\mathrm{tg}\gamma \neq 0$, і тому $\mathrm{tg}\alpha = -\frac{\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\gamma}{1-\mathrm{tg}\beta\mathrm{tg}\gamma}$, тобто $\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}(-\beta-\gamma)$, $\alpha = -\beta-\gamma+\pi k$, $\alpha+\beta+\gamma = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. З урахуванням того, що $0 < \alpha,\ \beta,\ \gamma < \frac{\pi}{2}$, маємо $k = 1$, звідки $\alpha+\beta+\gamma = \pi$. Легко доводиться, що коли $\zeta+\eta+\theta = \pi$, то $\mathrm{tg}\zeta+\mathrm{tg}\eta+\mathrm{tg}\theta = \mathrm{tg}\zeta\cdot\mathrm{tg}\eta\cdot\mathrm{tg}\theta$ (якщо ці тангенси існують). Відтак, гострі кути $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ є кутами трикутника (тобто мають суму, рівну π) тоді й тільки тоді, коли $\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\gamma = \mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta\cdot\mathrm{tg}\gamma$.

Отримали нерівність $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma \le \frac{3}{2}$ (5.3), яка для гострокутного трикутника з кутами $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ одержується застосуванням нерівності Єнсена для опуклої догори на проміжку $[0;\pi/2]$ функції $y = \cos x$. ■

Зауваження. Варто нагадати, що нерівність (5.3) виконується не лише для гострокутного, але й для будь-якого трикутника ABC з кутами $\alpha,\ \beta,\ \gamma$, попри неможливість використати нерівність Єнсена на відрізку $[0;\pi]$. Дійсно, якщо I – інцентр цього трикутника, і його вписане коло дотикається до сторін у точках P, Q і T (рис. 1), то доводжувана нерівність є рівносильною нерівності $\left(\overrightarrow{IP}+\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{IT}\right)^2 \ge 0$.

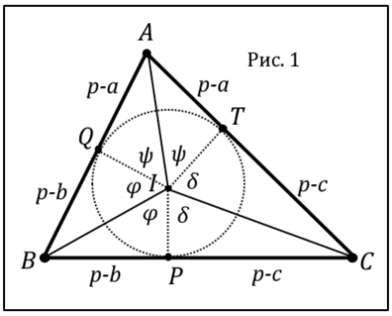

Рис. 1

За допомогою теореми косинусів нерівність (5.3) набуває алгебраїчного вигляду $abc \ge (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$ (5.4) для сторін a, b і c довільного трикутника. У такій ситуації нерівність доводиться, зокрема, застосуванням *перетворення Раві* (Ясінський, 2007; Manfrino, Ortega & Delgado, 2005). Нерівність (5.4) виражає класичну геометричну нерівність $R \ge 2r$ для радіусів описаного й вписаного кола трикутника. Дана задача у формі еквівалентної *геометричної* нерівності $a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \le 3abc$ вперше пропонувалась, напевне, на VI Міжнародній математичній олімпіаді (1964 р.).

У будь-якому трикутнику ABC зі сторонами a, b і c, півпериметром p, радіусом вписаного кола r кути ψ, φ і δ є гострими, $\psi+\varphi+\delta = \pi$ (рис. 1) , і тому $\mathrm{tg}\psi+\mathrm{tg}\varphi+\mathrm{tg}\delta = \mathrm{tg}\psi\cdot\mathrm{tg}\varphi\cdot\mathrm{tg}\delta$ (5.5), тобто $\frac{3p-2p}{r} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{r^3} \Leftrightarrow \frac{p}{r} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{r^3} \Leftrightarrow p^2r^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$. Оскільки $S = pr$ – площа трикутника ABC, то співвідношення (5.5) трансформується у формулу Герона.

Нерівність (5.4), як неважко показати, справджується не лише для сторін трикутника, але й для будь-яких невід'ємних чисел a, b і c. Цей факт пізніше фігурував у завданнях національних математичних олімпіад (зокрема, як нерівність (5.4^1) $a^3+b^3+c^3+3abc \ge ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)$, $a \ge 0, b \ge 0, c \ge 0$; 1975 р.).

Відзначимо, що учасники міжнародних математичних олімпіад мали ще одну нагоду зустрітись з таким популярним сюжетом.

Задача 6 (XLI Міжнародна математична олімпіада, 2000 р.). Нехай для додатних чисел u, v і w має місце рівність $uvw = 1$. Доведіть, що $\left(u-1+\frac{1}{v}\right)\left(v-1+\frac{1}{w}\right)\left(w-1+\frac{1}{u}\right) \le 1$. (6.1)

Розв'язання. Оскільки $uvw = 1$, то існують такі додатні числа $a,\ b$ і c, що $u = \frac{a}{b},\ v = \frac{b}{c},\ w = \frac{c}{a}$ (наприклад, можна взяти $a = 1, b = \frac{1}{u}, c = \frac{1}{uv}$). Такою підстановкою нерівність (6.1) зводиться до нерівності ($5.4\Leftrightarrow5.4^1$) для довільних $a > 0, b > 0, c > 0$. ■

Задача 7 (Румунська олімпіада, 2005 р.). Для додатних чисел a, b і c доведіть нерівність

$$2\sqrt{ab+bc+ca} \ \leq \ \sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{(b+c)(c+a)(a+b)}. \ (7.1)$$

Розв'язання. Покажемо, що без обмеження загальності можна вважати, що виконується рівність $ab+bc+ca=1$. Позначимо $ab+bc+ca=\lambda^2$, $\lambda>0$. Нехай $a_1=\frac{a}{\lambda}$, $b_1=\frac{b}{\lambda}$, $c_1=\frac{c}{\lambda}$, $a_1b_1+b_1c_1+c_1a_1=1$. Отже, нерівність (7.1) запишемо у вигляді

$$2\sqrt{\lambda a_1\cdot\lambda b_1+\lambda b_1\cdot\lambda c_1+\lambda c_1\cdot\lambda a_1} \leq \sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{(\lambda b_1+\lambda c_1)(\lambda c_1+\lambda a_1)(\lambda a_1+\lambda b_1)},$$

$$2\sqrt{a_1b_1+b_1c_1+c_1a_1} \ \leq \ \sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{(b_1+c_1)(c_1+a_1)(a_1+b_1)},$$

$$2 \ \leq \ \sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{(b_1+c_1)(c_1+a_1)(a_1+b_1)}.$$

Маємо довести нерівність $(a+b)(b+c)(a+c) \ \geq \ \frac{8}{3\sqrt{3}}$ (7.2) для таких додатних чисел a, b і c, що $ab+bc+ca=1$. Нехай $a=\mathrm{tg}\alpha$, $b=\mathrm{tg}\beta$, $c=\mathrm{tg}\gamma$, $0<\alpha,\ \beta,\ \gamma<\frac{\pi}{2}$. Тоді $\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\beta\mathrm{tg}\gamma+\mathrm{tg}\gamma\mathrm{tg}\alpha=1$, $\mathrm{tg}\alpha(\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\gamma)=1-\mathrm{tg}\beta\mathrm{tg}\gamma$. Позаяк $\mathrm{tg}\alpha>0$, $\mathrm{tg}\beta>0$, $\mathrm{tg}\gamma>0$, то $\mathrm{tg}\alpha=\mathrm{ctg}(\gamma+\beta)$, $\mathrm{tg}\alpha=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\gamma-\beta\right)$, $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, звідки $k=0$, тобто $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$. Потрібну нерівність (7.2) запишемо так:

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\cdot\frac{\sin(\beta+\gamma)}{\cos\beta\cos\gamma}\cdot\frac{\sin(\gamma+\alpha)}{\cos\gamma\cos\alpha} \ \geq \ \frac{8}{3\sqrt{3}}, \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)}{\cos\alpha\cos\beta}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\beta\cos\gamma}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}{\cos\gamma\cos\alpha} \ \geq \ \frac{8}{3\sqrt{3}},$$

$$\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta}\cdot\frac{\cos\alpha}{\cos\beta\cos\gamma}\cdot\frac{\cos\beta}{\cos\gamma\cos\alpha} \ \geq \ \frac{8}{3\sqrt{3}},$$

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \ \leq \ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3, \ (7.3)$$

$$0<\alpha,\ \beta,\ \gamma<\frac{\pi}{2}, \alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}.$$

Прологарифмуємо нерівність (7.3): $\frac{\ln\cos\alpha+\ln\cos\beta+\ln\cos\gamma}{3} \ \leq \ln\frac{\sqrt{3}}{2}$. Для функції $f(x)=\ln\cos x$, $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, $f'(x)=-\mathrm{tg}x$, $f''(x)=-\frac{1}{\cos^2x}<0$, і тому f – опукла догори на інтервалі $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ функція. За нерівністю Єнсена,

$$\frac{\ln\cos\alpha+\ln\cos\beta+\ln\cos\gamma}{3} \ \leq \ln\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}=\ln\cos\frac{\pi}{6}=\ln\frac{\sqrt{3}}{2},$$

що й треба було довести. ■

Задача 8 (Польська олімпіада, 1999 р.). Нехай для додатних чисел x, y і z виконується рівність $x+y+z=1$. Доведіть, що $x^2+y^2+z^2+2\sqrt{3xyz} \ \leq \ 1$. (8.1)

Розв'язання. Зробимо заміну $x=bc$, $y=ca$, $z=ab$ (легко довести, що така система має єдиний розв'язок відносно a, b і c для будь-яких додатних x, y і z). Тоді $ab+bc+ca=1$, причому нерівність (8.1) набуде вигляду $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2\sqrt{3}abc\leq1$, $(ab+bc+ca)^2+2\sqrt{3}abc\leq 1+2abc(a+b+c)$, $\sqrt{3} \ \leq \ a+b+c$. Нехай $a=\mathrm{tg}\alpha$, $b=\mathrm{tg}\beta$, $c=\mathrm{tg}\gamma$, $0<\alpha,\ \beta,\ \gamma<\frac{\pi}{2}$. Тоді, як ми вже знаємо, $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$, і маємо нерівність $\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\gamma \ \geq \ \sqrt{3}$, котра, у свою чергу, випливає з нерівності Єнсена для опуклої донизу на інтервалі $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ функції $f(t)=\mathrm{tg}t$:

$$\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\gamma}{3} \ \geq \ \mathrm{tg}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}=\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}. \ ■$$

Задача 9. Доведіть, що з п'яти попарно різних чисел завжди можна обрати такі два числа (позначимо їх через x та y), що $0 \ \leq \ \frac{x-y}{1+xy} \ \leq \ 1$.

Розв'язання. Запишемо наші п'ять чисел у вигляді $\mathrm{tg}\alpha_i$, $\alpha_i\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, $1\leq i\leq5$. Маємо: $(-\pi/2;\pi/2)=(-\pi/2;-\pi/4)\cup[-\pi/4;0)\cup[0;\pi/4)\cup[\pi/4;\pi/2)$. Жодні два з цих чотирьох проміжків не мають спільних точок (є диз'юнктними), і, за принципом Діріхле, до одного з них потрапляють принаймні два з п'яти чисел α_i, $1\leq i\leq5$. Нехай це $\alpha_1<\alpha_2$. Тоді $0<\alpha_2-\alpha_1<\frac{\pi}{4}$, $0<\mathrm{tg}(\alpha_2-\alpha_1)<\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}=1$, тобто $0<\frac{\mathrm{tg}\alpha_2-\mathrm{tg}\alpha_1}{1+\mathrm{tg}\alpha_2\mathrm{tg}\alpha_1}<1$, і ми можемо взяти $x=\mathrm{tg}\alpha_2$, $y=\mathrm{tg}\alpha_1$. ■

Наступна задача дає можливість дидактичного *підсилення* розібраного твердження.

Задача 10. Доведіть, що твердження попередньої задачі залишається правильним, якщо чисел не п'ять, а лише чотири.

Розв'язання. Ідею розв'язання задачі 9 потрібно модифікувати. Нехай $\mathrm{tg}\alpha$, $\mathrm{tg}\beta$, $\mathrm{tg}\gamma$, $\mathrm{tg}\delta$ – дані чотири числа, $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\gamma<\delta<\frac{\pi}{2}$. Розіб'ємо сегмент $[\alpha;\alpha+\pi]$ на чотири рівні за довжиною попарно диз'юнктні проміжки: $[\alpha;\alpha+\pi]=[\alpha;\alpha+\pi/4)\cup[\alpha+\pi/4;\alpha+\pi/2)\cup[\alpha+\pi/2;\alpha+3\pi/4)\cup[\alpha+3\pi/4;\alpha+\pi]$. Розглянемо п'ять чисел $\alpha<\beta<\gamma<\delta<\alpha+\pi$. Хоча б один з чотирьох проміжків містить принаймні два з цих п'яти чисел (зрозуміло, що такими двома числами не можуть бути α і $\alpha+\pi$ **одночасно**). Залишається скористатись міркуваннями з розв'язання задачі 9 та π-періодичністю функції $y=\mathrm{tg}x$ (якщо одним з двох чисел буде $\alpha+\pi$). ■

Задача 11 (Журнал «У світі математики», № 3, 1996 р.). Доведіть, що для довільних дійсних чисел a, b і c виконується нерівність $ab+bc+ca\le 1+\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}$. (11.1)

Розв'язання. Оскільки $ab+bc+ca\le|ab+bc+ca|\le|a||b|+|b||c|+|c||a|$, то можемо обмежитись невід'ємними числами a, b і c. Покладемо $a=\mathrm{tg}\alpha$, $b=\mathrm{tg}\beta$, $c=\mathrm{tg}\gamma$, $0\le\alpha,\ \beta,\ \gamma<\frac{\pi}{2}$. Нерівність (11.1) матиме вигляд $\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\beta\mathrm{tg}\gamma+\mathrm{tg}\gamma\mathrm{tg}\alpha\le 1+\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$ $\Leftrightarrow$ $\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha+\sin\gamma\sin\alpha\cos\beta\le 1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\Leftrightarrow\cos(\alpha+\beta+\gamma)\ge-1$. ■

Задача 11 дозволяє звернути увагу учнів на «розгортання» косинуса суми трьох кутів (що в шкільній практиці рідко коли зустрічається) і може пропонуватись для закріплення основної ідеї та самостійного розв'язування.

Задача 12 (І Всеукраїнська Internet-олімпіада, 2001 р.). Розв'яжіть рівняння

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\left(4-x\sqrt{3}\right)^2}=1. \quad (12.1)$$

Розв'язання. Застосуємо тригонометричну параметризацію рівняння (12.1) і зведемо задачу до розв'язування системи

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}=\sin\alpha,\\ \dfrac{1}{4-x\sqrt{3}}=\cos\alpha,\\ 0<\alpha<2\pi,\alpha\ne\dfrac{\pi}{2},\alpha\ne\dfrac{3\pi}{2}.\end{cases}$$

Отже,

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{\sin\alpha},\\ \sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)-\sin2\alpha=0,\\ 0<\alpha<2\pi,\alpha\ne\dfrac{\pi}{2},\alpha\ne\dfrac{3\pi}{2};\end{cases}\qquad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\alpha=\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,n\in\mathbb{Z},\\ \alpha=\dfrac{2\pi}{9}+\dfrac{2\pi m}{3},m\in\mathbb{Z};\end{array}\right.\\ x=\dfrac{1}{\sin\alpha},\\ 0<\alpha<2\pi,\alpha\ne\dfrac{\pi}{2},\alpha\ne\dfrac{3\pi}{2}.\end{cases}$$

Тепер ми дістаємо всі чотири корені вихідного рівняння.

Відповідь: $x=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}}$, $x=\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{9}}$, $x=\frac{1}{\sin\frac{8\pi}{9}}$, $x=\frac{1}{\sin\frac{14\pi}{9}}$. ■

Задача 13. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{1-x}=2x^2-1+2x\sqrt{1-x^2}$.

Розв'язання. З необхідністю $x\in[-1;1]$ (це – область допустимих значень (ОДЗ) рівніння). Наявність виразів $\sqrt{1-x^2}$, $2x^2-1$ указує на доцільність підстановки $x=\cos\alpha$, $\alpha\in[0;\pi]$, яка забезпечує взаємно однозначну відповідність між відрізками $[0;\pi]$ та $[-1;1]$ і трансформує ірраціональне рівняння в тригонометричне $\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}=\cos2\alpha+\sin2\alpha$, $\sin\frac{\alpha}{2}-\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=0$.

Для $\alpha\in[0;\pi]$ розглядаємо сукупність

$$\left[\begin{array}{l}\alpha=\dfrac{3\pi}{10}+\dfrac{4\pi m}{5},\ m\in\mathbb{Z},\\ \alpha=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{4\pi n}{3},\ n\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Нескладно визначити, що умові $\alpha\in[0;\pi]$ відповідає лише $m=0$, і рівняння має єдиний розв'язок.

Відповідь: $x=\cos\frac{3\pi}{10}$. ■

Зауваження. Цей розв'язок, як відомо, можна виразити в радикалах, скориставшись формулами $\sin3\varphi=3\sin\varphi-4\sin^3\varphi$, $\cos2\varphi=1-2\sin^2\varphi$. Оскільки $\sin18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ (це єдиний корінь рівняння $4x^3-2x^2-3x+1=0$, $(x-1)(4x^2+2x-1)=0$ на проміжку $(0;1)$), то знаходимо, що $\cos54^\circ=\sin36^\circ=\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$.

Задача 14. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{1-x^2}=4x^3-3x$.

Розв'язання. Оскільки областю допустимих значень рівняння є проміжок $[-1;1]$, то, ураховуючи формулу для косинуса *потрійного* кута, ми можемо зробити підстановку $x = \cos\alpha$, $\alpha \in [0;\pi]$, перетворивши ірраціональне рівняння на тригонометричне: $\sin\alpha = \cos3\alpha$, $\cos3\alpha - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 0$. Отже,

$$\left[\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi m}{2},\ m \in \mathbb{Z}, \\ \alpha = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

На відрізку $[0;\pi]$ містяться лише три значення α.

Відповідь: $x = \cos\frac{\pi}{8}$, $x = \cos\frac{3\pi}{4}$, $x = \cos\frac{5\pi}{8}$. ■

Зауваження. Ці розв'язки можна виразити і в радикалах.

Задача 15. Розв'яжіть рівняння $4x^3 - 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Розв'язання. Вигляд лівої частини спонукає структурно розглядати її з точки зору формули для косинуса *потрійного* кута. У різних джерелах (див., наприклад, (Третяк, 2011)) тригонометричній підстановці передує доведення того, що шукані x не можуть задовольняти нерівність $|x| > 1$. Якщо припустити, що $|x| > 1$, то $4x^2 - 3 > 1$, $|4x^3 - 3x| = |x| \cdot |4x^2 - 3| > 1 > \frac{\sqrt{3}}{2}$, і тому всі дійсні корені рівняння належать відрізку $[-1;1]$. Візьмемо тепер $x = \cos\alpha$, $\alpha \in [0;\pi]$, $3\alpha = \gamma$, $\cos\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $0 \le \gamma \le 3\pi$. Маємо: $\gamma = \frac{\pi}{6}$, $\gamma = \frac{11\pi}{6}$, $\gamma = \frac{13\pi}{6}$.

Відповідь: $x = \cos\frac{\pi}{18}$, $x = \cos\frac{11\pi}{18}$, $x = \cos\frac{13\pi}{18}$. ■

Зауваження. Насправді, встановлення того, що дійсні розв'язки рівняння обов'язково задовольняють нерівність $|x| \le 1$, є «зайвою» частиною розв'язання. Ми можемо відразу поставити за мету спочатку шукати всі ті корені, які можна подати у вигляді $x = \cos\alpha$, $\alpha \in [0;\pi]$ (тобто які належать проміжку $[-1;1]$). Оскільки знайдено три різні числа ($\cos\frac{\pi}{18} > \cos\frac{11\pi}{18} > \cos\frac{13\pi}{18}$), які задовольняють наше рівняння, то вони й будуть утворювати множину всіх коренів даного кубічного рівняння (кубічне рівняння має не більше, ніж три дійсні корені, ураховуючи їхню кратність). З цього випливає, що опікуватись знаходженням розв'язків поза відрізком $[-1;1]$ узагалі не слід.

Аналогічна ситуація виникає в наступній задачі.

Задача 16. Розв'яжіть рівняння $8x(2x^2 - 1)(8x^4 - 8x^2 + 1) = 1$.

Розв'язання. Подивимось, як доводиться, що шукані x не можуть задовольняти нерівність $|x| \ge 1$. Якщо $|x| \ge 1$, то $2x^2 - 1 \ge 1$, $8x^4 - 8x^2 + 1 = 8x^2(x^2 - 1) + 1 \ge 1$, $|8x(2x^2 - 1)(8x^4 - 8x^2 + 1)| \ge 8$. Покладемо $x = \cos\alpha$, $\alpha \in (0;\pi)$. Тоді $8\cos\alpha\cos2\alpha\cos4\alpha = 1$, і для $\alpha \in (0;\pi)$ – позаяк $\sin\alpha \ne 0$ – ця рівність є еквівалентною рівності $\sin8\alpha = \sin\alpha$.

Маємо рівняння $\cos\frac{9\alpha}{2}\sin\frac{7\alpha}{2} = 0$, тобто

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{2\pi m}{7},\ m \in \mathbb{Z}, \\ \alpha = \dfrac{\pi}{9} + \dfrac{2\pi n}{9},\ n \in \mathbb{Z}; \end{array}\right. \\ 0 < \alpha < \pi. \end{array}\right.$$

Дані «серії» не перетинаються (для цілих m і n рівність $18m = 14n + 1$ виконуватись не може), і легко показати, що $1 \le m \le 3$, $0 \le n \le 3$, чим і визначаються всі 7 коренів рівняння.

Відповідь: $x = \cos\frac{2\pi m}{7}$, $1 \le m \le 3$; $x = \cos\frac{(2\pi+1)n}{9}$, $0 \le n \le 3$. ■

Зауваження. Знайдені числа всі є різними. І тому вони й складуть множину всіх коренів многочлена сьомого степеня. Перша частина наших міркувань, присвячених обґрунтуванню того, що з необхідністю розв'язки даного рівняння задовольняють нерівність $|x| < 1$, є необов'язковою. Можна було взяти до уваги формули $\cos2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1$, $\cos4\varphi = 8\cos^4\varphi - 8\cos^2\varphi + 1$, підставити $x = \cos\alpha$, $\alpha \in (0;\pi)$ (значення $\alpha = 0$ та $\alpha = \pi$ нас, очевидно, не цікавлять) і знайти всі 7 коренів рівняння, що робить розгляд випадку $|x| \ge 1$ непотрібним.

Задача 17 (VII Соросівська олімпіада школярів України, 2000 р.). Нехай $f(x) = 2x^2 - 1$. Для $m \ge 2$ розв'яжіть рівняння $f^{(m)}(x) = x$ (тут $f^{(m)}(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x)\dots))}_{m\ \text{разів}}$, $m \ge 2$; $f^{(1)}(x) = f(x)$).

Розв'язання. Для $|x| > 1$ маємо: $f(x) = |f(x)| = |2x^2 - 1| = 2x^2 - 1 > x^2 > |x| \ge x$, і тому розв'язки рівняння мусять задовольняти нерівність $|x| \le 1$. Отже, візьмемо $x = \cos\alpha$, $\alpha \in [0;\pi]$, $\cos2^m\alpha =$

$\cos\alpha$. Одержуємо: $\alpha = \frac{2\pi n}{2^m+1}$, $0 \le n \le 2^{m-1}$, $n \in \mathbb{Z}$; $\alpha = \frac{2\pi k}{2^m-1}$, $1 \le k \le 2^{m-1}-1$, $k \in \mathbb{Z}$. Числа 2^m-1 і 2^m+1 є взаємно простими, і тому для $0 \le n \le 2^{m-1}$, $1 \le k \le 2^{m-1}-1$ рівність $(2^m-1)n = (2^m+1)k$ є неможливою. Усі вказані вище значення α (і відповідні значення $x = \cos\alpha$) є різними.

Відповідь: $x = \cos\frac{2\pi n}{2^m+1}$, $0 \le n \le 2^{m-1}$; $x = \cos\frac{2\pi k}{2^m-1}$, $1 \le k \le 2^{m-1}-1$. ■

Зауваження. Ми знайшли 2^m розв’язків, при тому, що $Q(x) = f^{(m)}(x) - x$ є многочленом саме 2^m-го степеня. Як і в двох попередніх задачах, можна було б не встановлювати спеціально, що корені рівняння мають належати відрізку $[-1;1]$.

Задача 18. Розв’яжіть рівняння $\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+x}}} = x$.

Розв’язання. Розв’язавши нерівність $2-\sqrt{2+x} \ge 0$, визначаємо ОДЗ для даного рівняння: $x \in [-2;2]$. Утім, шукані корені з необхідністю задовольняють ще й умови $x \ge 0$, $x^2-2 = \sqrt{2-\sqrt{2+x}} \ge 0$. Ми можемо вважати, що $\sqrt{2} \le x \le 2$. Позначимо $\frac{x}{2} = \cos\alpha$, $\alpha \in [0;\pi/4]$. Після нескладних перетворень одержимо рівняння $-2\cos4\alpha = \sqrt{2+2\cos\alpha}$. Тепер ми можемо додатково «уточнити» оцінку для α: $\frac{\pi}{8} \le \alpha \le \frac{\pi}{4}$ $(\cos4\alpha \le 0, \frac{\pi}{2} \le 4\alpha \le \pi)$.

Далі, $2\cos^2 4\alpha - 1 = \cos\alpha$, тобто $\cos8\alpha - \cos\alpha = 0$,

$$\left[\begin{aligned} &\alpha = \frac{2\pi m}{7},\ m \in \mathbb{Z},\\ &\alpha = \frac{2\pi n}{9},\ n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}\right.$$

Хоча ці «серії» містять спільні значення α, нам потібно лише відібрати $\alpha \in [\pi/8;\pi/4]$. Єдиним розв’язком рівняння буде $x = 2\cos\frac{2\pi}{9}$ (для жодного цілого m не виконується умова $\frac{\pi}{8} \le \frac{2\pi m}{7} \le \frac{\pi}{4}$).

Відповідь: $x = 2\cos\frac{2\pi}{9}$. ■

Зауваження. Розв’язуванню рівняння може передувати обговорення певних властивостей функції $\varphi(x) = \sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+x}}} - x$. Вона строго спадає на відрізку $[-2;2]$ (бо спадною є функція $\psi(x) = \sqrt{2-\sqrt{2+x}}$), і тому наше рівняння і повинно мати не більше від одного розв’язку. До того ж, функція φ неперервна на відрізку $[-2;2]$, $\varphi(-2) > 0$, $\varphi(2) < 0$. Отже, рівняння $\varphi(x) = 0$ має єдиний розв’язок.

Під час роботи з нестандартними рівняннями та нерівностями для уникнення формування небажаних стереотипів та хибних асоціацій (Мітельман, 2019) варто звертати увагу учнів на специфічні властивості відповідних функцій, що може бути вирішальним для успішного розв’язування задач.

Як корисний приклад запропонуємо розібрати з учнями задачу-«trick», яка лише зовнішньо схожа із задачею 18 (і не пов’язана із тригонометричними підстановками).

Задача 19. Розв’яжіть рівняння $\sqrt{4+\sqrt{2-\ldots+\sqrt{2-\sqrt{4+\sqrt{2-x}}}}} = x$ (вираз у лівій частині рівняння містить 2024 знака кореня).

Розв’язання. Оскільки має справджуватись нерівність $2-\sqrt{4+\sqrt{2-x}} \ge 0$, яка має єдиний розв’язок $x = 2$, то достатньо переконатись, що це значення $x = 2$ задовольняє умову задачі.

Відповідь: $x = 2$. ■

Задача 20. Розв’яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} x = 4y^3 - 3y,\\ y = 4z^3 - 3z,\ (20.1)\\ z = 4x^3 - 3x. \end{cases}$$

Розв’язання. Дана система рівнянь не є симетричною (як інколи хибно вважають, обмежуючись лише випадком $x \le y \le z$), а лише циклічною (!). Доведемо, що в силу системи $-1 \le x, y, z \le 1$. Із системи (20.1) випливає, що $x + y + z = x^3 + y^3 + z^3$ (20.2). Нехай $x > 1$. Маємо: $z = 4x^3 - 3x$. Розглянемо функцію $\varphi(x) = 4x^3 - 3x$. Тоді для $x > 1$ $\varphi(x) = x(4x^2-3) > 1$. Отже, $z > 1$. Оскільки $y = 4z^3 - 3z$, то $y > 1$. Якщо $x > 1, y > 1, z > 1$, то $x^3 > x, y^3 > y, z^3 > z$, що суперечить рівності (20.2). Аналогічно доводиться, що $y \le 1, z \le 1$. Функція φ є непарною, а тому $z = \varphi(x) < -1$ для $x < -1$. Відтак, урешті-решт, дістанемо, що $-1 \le x, y, z \le 1$. Покладемо $x = \cos\alpha$, $\alpha \in [0;\pi]$. Тоді $z = \cos3\alpha$, $y = \cos9\alpha$, $x = \cos27\alpha$. Набір умов, з яких утворено вихідну систему (20.1), можна замінити «перевантаженим», але – еквівалентним набором:

$$\begin{cases} x = 4y^3 - 3y, \\ y = 4z^3 - 3z, \\ z = 4x^3 - 3x; \\ x = \cos\alpha, \\ z = \cos3\alpha, \\ y = \cos9\alpha; \\ \cos\alpha = \cos27\alpha, \\ 0 \le \alpha \le \pi. \end{cases}$$

Задачу зведено до знаходження на проміжку $[0;\pi]$ всіх розв'язків рівняння $\cos\alpha = \cos27\alpha \Leftrightarrow \sin13\alpha\sin14\alpha = 0$: $\alpha = \frac{\pi m}{14}$, $1 \le m \le 13$; $\alpha = \frac{\pi n}{13}$, $0 \le n \le 13$ (рівність $\frac{\pi m}{14} = \frac{\pi n}{13}$, $1 \le m \le 13$, $0 \le n \le 13$, не може мати місця для цілих m і n).

Відповідь: система має 27 розв'язків (неважко виразити їх через знайдені α). ■

Задача 21. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} x = z(4 - z), \\ y = x(4 - x), \quad (21.1) \\ z = y(4 - y). \end{cases}$$

Розв'язання. Позначимо $a = x - 2$, $b = y - 2$, $c = z - 2$. Тоді $b = 2 - a^2$, $a = 2 - c^2$, $c = 2 - b^2$. Якщо $u = -\frac{a}{2}$, $v = -\frac{b}{2}$, $w = -\frac{c}{2}$, то система (21.1) набуде вигляду

$$\begin{cases} u = 2w^2 - 1, \\ w = 2v^2 - 1, \quad (21.2) \\ v = 2u^2 - 1. \end{cases}$$

Доведемо, що $-1 \le u, v, w \le 1$. «Ліва» частина подвійних нерівностей є очевидною. Нехай $u > 1$, тоді, зрозуміло, $v > 1$ і $w > 1$. Але із системи (21.2) випливає, що $(2u^2 - u - 1) + (2v^2 - v - 1) + (2w^2 - w - 1) = 0$, тобто $(u - 1)(2u + 1) + (v - 1)(2v + 1) + (w - 1)(2w + 1) = 0$, що для $u > 1, v > 1, w > 1$ не може виконуватись. Тепер ми здобули право на «тригонометричну» пістановку: $u = \cos\alpha$, $\alpha \in [0;\pi]$. Тоді $v = \cos2\alpha$, $w = \cos4\alpha$. На відрізку $[0;\pi]$ розв'язуємо рівняння $\cos\alpha = \cos8\alpha$. Відтак, $\alpha = \frac{2\pi m}{9}$, $0 \le m \le 4$; $\alpha = \frac{2\pi n}{7}$, $1 \le n \le 3$.

Відповідь: система має 8 розв'язків (записати їх пропонуємо читачам). ■

Задача 22. Розв'яжіть у додатних дійсних числах x, y і z систему рівнянь

$$\begin{cases} xy + yz + zx = 1, \\ \frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{2y}{1+y^2} = \frac{1-z^2}{1+z^2}. \end{cases} \quad (22.1)$$

Розв'язання 1. Функція $f(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ строго спадає на проміжку $[0;+\infty)$, і тому $x = z$. Одержимо таку систему рівнянь для $x > 0$ і $y > 0$:

$$\begin{cases} x^2 + 2yx - 1 = 0, \\ x(1 + y^2) = 1 + x^2. \end{cases}$$

З першої рівності, як із квадратного рівняння відносно x, знаходимо $x = \sqrt{y^2 + 1} - y$. Далі, $\left(\sqrt{y^2 + 1} - y\right)(y^2 + 1) = 2(y^2 + 1) - 2y\sqrt{y^2 + 1}$, $\sqrt{y^2 + 1} - y = 2 - \frac{2y}{\sqrt{y^2+1}}$, $\sqrt{y^2 + 1} = 2$, $y = \sqrt{3}$, $x = 2 - \sqrt{3}$, $z = 2 - \sqrt{3}$. ■

Розв'язання 2. У цій задачі очевидним є мотив використання *універсальної тригонометричної підстановки*:

$$\sin\varphi = \frac{2\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}}, \cos\varphi = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}}, \varphi \ne \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

А також слід звернути увагу на геометричне тлумачення першої рівності системи. Нехай $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$, $x = \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$, $y = \mathrm{tg}\frac{\beta}{2}$, $z = \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}$. Розглянемо рівність $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\frac{\beta}{2} + \mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} + \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = 1$, яку для $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$ можна записати у вигляді $\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}+\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}}{1-\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}}$, $\mathrm{tg}\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)$, тобто $\alpha + \beta + \gamma = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Звідси $k = 0$ і $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Система (22.1) набуде вигляду

$$\begin{cases}\cos\alpha = \cos\gamma = \sin\beta, \\ \alpha+\beta+\gamma=\pi, \qquad (22.2) \\ 0<\alpha,\ \beta,\ \gamma<\pi. \end{cases}$$

Отже, $\alpha=\gamma$, $\beta=\pi-2\alpha$, $\cos\alpha=\sin 2\alpha$, $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$. З цих умов визначаємо, що $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{2\pi}{3}$, $\gamma=\frac{\pi}{6}$, тобто $x=\mathrm{tg}\frac{\pi}{12}$, $y=\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}$, $z=\mathrm{tg}\frac{\pi}{12}$.

Можна міркувати дещо в інший спосіб, звернувшись до розв’язання задачі 5. Позначимо $x=\frac{1}{u}$, $y=\frac{1}{v}$, $z=\frac{1}{w}$. Тоді $xy+yz+zx=1 \ \Leftrightarrow\ u+v+w=uvw$, і тому, як було показано раніше, $u,\ v,\ w$ – тангенси кутів гострокутного трикутника. Звідси випливає, що ми можемо покласти $x=\mathrm{ctg}\alpha$, $y=\mathrm{ctg}\beta$, $z=\mathrm{ctg}\gamma$, $0<\alpha,\ \beta,\ \gamma<\frac{\pi}{2}$, $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. Якщо $0<\zeta,\ \eta,\ \theta<\pi$, $\frac{\zeta}{2}=\frac{\pi}{2}-\alpha$, $\frac{\eta}{2}=\frac{\pi}{2}-\beta$, $\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{2}-\gamma$, то $x=\mathrm{tg}\frac{\zeta}{2}$, $y=\mathrm{tg}\frac{\eta}{2}$, $z=\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}$, $\zeta+\ \eta+\ \theta=\pi$, $\cos\zeta=\cos\theta=\sin\eta$.

Відповідь: $x=2-\sqrt{3}$, $y=\sqrt{3}$, $z=2-\sqrt{3}$. ∎

Задача 23 (American Invitational Mathematics Exams, 2022 р.). Розв’яжіть у додатних дійсних числах x, y і z систему рівнянь

$$\begin{cases}\sqrt{x(2-y)}+\sqrt{y(2-x)}=1, \\ \sqrt{y(2-z)}+\sqrt{z(2-y)}=\sqrt{2}, \ (23.1) \\ \sqrt{z(2-x)}+\sqrt{x(2-z)}=\sqrt{3}. \end{cases}$$

Розв’язання. З умови випливає, що $0<x,y,z\leq 2$. Зробимо заміни: $x=2\sin^2\alpha$, $y=2\sin^2\beta$, $z=2\sin^2\gamma$, $0<\alpha,\beta,\gamma\leq\frac{\pi}{2}$. Тоді система матиме вигляд

$$\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}, \\ \sin(\beta+\gamma)=\frac{\sqrt{2}}{2}, \ (23.2) \\ \sin(\gamma+\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Відтак, $\alpha+\beta=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $\beta+\gamma=(-1)^m\frac{\pi}{4}+\pi m$, $\gamma+\alpha=(-1)^\ell\frac{\pi}{3}+\pi\ell$. Зрозуміло, що цілі числа k, ℓ і m можуть набувати лише значень 0 та 1. З урахуванням умови $0<\alpha,\beta,\gamma\leq\frac{\pi}{2}$ нескладним перебором дістаємо розв’язки.

Відповідь: $x=1-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y=1-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$, $z=1+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$; $x=1+\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y=1+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$, $z=1-\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$. ∎

Задача 24 (VII Фестиваль юних математиків, м. Одеса, 1999 р.). Нехай дано дійсне число $a\neq 0$ і натуральне $m\geq 2$. Доведіть, що існує множина $\mathcal{B}\subset\mathbb{R}$ із 2^m елементів така, що для кожного $b\in\mathcal{B}$ в послідовності, заданій рекурентно $x_1=b$, $x_{n+1}=2x_n^2-a^{2^n}$, $n\geq 1$, виконується рівність $x_{m+1}=0$.

Розв’язання. Умову задачі задовольняє множина $\mathcal{B}=\left\{a\cos\frac{(2k-1)\pi}{2^{m+1}}: 1\leq k\leq 2^m,\ k\in\mathbb{N}\right\}$. Якщо число b має вигляд $b=a\cos\alpha$, то, за індукцією, $x_{n+1}=a^{2^n}\cos 2^n\alpha$. Звідки $x_{m+1}=a^{2^m}\cos\left(\pi k-\frac{\pi}{2}\right)=0$. ∎

Задача 25. Доведіть, що для кожного $n\in\mathbb{N}$ існує принаймні $\left[\sqrt{\frac{n+1}{2}}\right]$ пар натуральних чисел k і m таких, що $k\leq n$ і $4k^3-3k+1=2m^2$.

Розв’язання. Задачу розв’язує рівність $4(2x^2-1)^3-3(2x^2-1)=2(4x^3-3x)^2-1$, яка, як легко перевірити безпосередньо, виконується для всіх дійсних x. Можна покласти $k=2t^2-1$, $m=4t^3-3t$, $t\in\mathbb{N}$. Тоді вимога $k\leq n$ дає, що $1\leq t\leq\sqrt{\frac{n+1}{2}}$. Наведена тотожність має очевидне тригонометричне походження, продиктоване формулами для косинуса потрійного і подвійного кута, згідно з якими $\cos 6\alpha=4\cos^3 2\alpha-3\cos 2\alpha$ і $\cos 6\alpha=2\cos^2 3\alpha-1$. Якщо позначити $u=\cos\alpha$, то ми одержуємо, що $4(2u^2-1)^3-3(2u^2-1)=2(4u^3-3u)^2-1$ для всіх $u\in[-1;1]$. Оскільки йдеться про многочлени, то остання рівність справджується на всій числовій прямій. ∎

Структурну спорідненість із тригонометричними підстановками в алгебраїчних задачах має застосування властивостей *гіперболічних* функцій. Кожна функція, визначена на всій числовій прямій, в **єдиний спосіб** розкладається в суму парної та непарної функції. Для функції $y=e^x$ таким парним «складником» буде гіперболічний косинус $\mathrm{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, а непарним – гіперболічний синус $\mathrm{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$. Гіперболічні функції не входять до шкільних програм, але вивчення їхніх графіків, елементарних властивостей, обернених гіперболічних функцій є цілком доступним для учнів класів математичного профілю, для факультативних і гурткових занять, для організації проєктної діяльності в старшій школі. Зокрема, учні із зацікавленістю працюють із формулами, аналогічними знайомим для них тригонометричним формулам: $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$, $\mathrm{sh}(x \pm y) = \mathrm{sh}x\mathrm{ch}y \pm \mathrm{sh}y\mathrm{ch}x$, $\mathrm{ch}(x \pm y) = \mathrm{ch}x\mathrm{ch}y \pm \mathrm{sh}y\mathrm{sh}x$, $\mathrm{sh}2x = 2\mathrm{sh}x\mathrm{ch}x$, $\mathrm{sh}3x = 4\mathrm{sh}^3 x + 3\mathrm{sh}x$, $\mathrm{ch}3x = 4\mathrm{ch}^3 x - 3\mathrm{ch}x$.

Задача 26. Розв’яжіть рівняння $x\sqrt{x^2+1}(16x^4 + 16x^2 + 3) = 2$.

Розв’язання. Функція $y = \mathrm{sh}t$ строго зростає на всій числовій прямій, її множина значень $E(y) = \mathbb{R}$. Оскільки $\mathrm{ch}x = \sqrt{\mathrm{sh}^2 x + 1}$, $16x^4 + 16x^2 + 3 = (4x^2+1)(4x^2+3)$, то доцільно зробити підстановку $x = \mathrm{sh}t$. То ж матимемо рівняння $\mathrm{sh}3t \cdot \mathrm{ch}t \cdot (4\mathrm{sh}^2 t + 1) = 2$, $\mathrm{sh}3t \cdot \mathrm{ch}3t = 2$, $\mathrm{sh}6t = 4$. Обернена до гіперболічного синуса функція *ареасинус* виражається формулою $\mathrm{arsh}u = \ln(u + \sqrt{u^2+1})$.

Отже,

$$6t = \mathrm{arsh}4,\ 6t = \ln\left(4 + \sqrt{17}\right),\ t = \ln\sqrt[6]{4 + \sqrt{17}},$$
$$x = \mathrm{sh}\ln\sqrt[6]{4 + \sqrt{17}},\ x = \frac{\sqrt[3]{4+\sqrt{17}} - 1}{2\sqrt[6]{4+\sqrt{17}}}.$$

Відповідь: $x = \frac{\sqrt[3]{4+\sqrt{17}} - 1}{2\sqrt[6]{4+\sqrt{17}}}$. ■

Висновки та перспективи подальших розвідок. Досвід викладання в класах з поглибленим вивченням математики, результативної підготовки школярів до ІІІ та IV етапів Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики, проведення занять і семінарів з підвищення кваліфікації вчителів математики підтверджують, що системне впровадження в освітню практику тригонометричних підходів до розв’язування спеціальних типів алгебраїчних рівнянь, систем рівнянь, доведення нерівностей тощо є дієвим формувальним кроком компетентнісного розвитку, пропедевтикою певних технічних прийомів, котрі застосовуються й у вищій математиці. Такі *транстематичні* дидактико-методичні комплекси, як розглянутий у статті, сприяють оптимізації ресурсів навчального часу, фундаменталізації фахового зростання, виводять учителів та учнів на новий рівень інтеграції змістових ліній програми, створюють передумови для мотивації спільної пошукової активності сучасного вчителя й обдарованих учнів з високими освітніми потребами в галузі математики і для удосконалення навичок аналізу матеріалів олімпіад з точки зору вибудовування зв’язків між задачами зовнішньо несхожої математичної природи. Учителі та учні розширюють свої уявлення щодо місця тригонометрії в структурі шкільного курсу математики, і це суттєво стимулює творче оволодіння її змістом.

Подальші дослідження мають забезпечувати на принципах наскрізності й цільності постійний науково-методичний супровід ресурсної основи профільного (поглибленого) вивчення математики в Новій українській школі. Тоді академічне спрямування профільного навчання математики на поглибленому рівні зможе виступати повноцінним фундаментом єдності трьох структурних компонентів інтеграційних процесів: цілепокладання, взаємодії різних розділів курсу математики, кінцевих результатів. Конкретизується це, зокрема, неприпинним моделюванням нових деталізованих дидактичних продуктів, присвячених комбінуванню нестандартних методів розв’язування складних задач, що дозволяє вирішувати дану проблему наданням учителеві широких можливостей вибору навчального матеріалу для всіх типів діяльності. Вважаємо також, що наукове завдання створення й апробації аналогічних дидактичних комплексів з вузлових тематичних розділів (особливо – із задачами олімпіадного та ускладненого типу) повинно бути в зоні постійної підвищеної уваги під час організації професійної підготовки студентів – майбутніх учителів математики.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

Барановська, Г. Г., & Ясінський, В. В. (1999). *Практикум з математики. Тригонометрія*. Київ, НТУ України «Київський політехнічний інститут».

Гайштут, О. Г., & Ушаков, Р. П. (1997). *Тригонометрія: довідник-задачник*. Київ, МАГІСТР-S.

Гончаренко, С. У. (2008a). Фундаменталізація освіти як дидактичний принцип. *Шлях освіти*, *1*(*47*), 2–6.

Гончаренко, С. У. (2008b). Фундаменталізація професійної освіти як дидактичний принцип. *Теорія і практика управління соціальними системами: філософія, психологія, педагогіка, соціологія*, *2*, 87–91.

Грицик, Т. А. (2010). *Диференційоване вивчення тригонометричного матеріалу у профільній школі*. Дис. канд. пед. наук, Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова.

Задоріна, О. М., Мітельман, І. М., & Папач, О. І. (2022). Питання підготовки майбутніх учителів математики до інтеграції в систему післядипломної педагогічної освіти. *Нова педагогічна думка*, *3*(*111*), 81– 90. DOI: 10.37026/2520-6427-2022-111-3-81-90.

Задоріна, О. М., Мітельман, І. М., Моторіна, В. Г., & Папач, О. І. (2024). Скаффолдинг як інструмент випереджального навчання розв’язування ускладнених геометричних задач методом координат та його дидактико-методичного супроводу. *Інноваційна педагогіка*, *74*, 33–45. DOI: https://doi.org/10.32782/2663-6085/2024/74.5.

Захарчук, Н. В. (2015). Принципи відбору змісту освіти у контексті фундаменталізаційних процесів. *Вісник Національного авіаційного університету. Серія: Педагогіка. Психологія* [електронне наукове видання], *6*. URL: https://jrnl.nau.edu.ua/index.php/VisnikPP/article/view/10199.

Карпенко, Л. В. (2016). *Тригонометрія: навчальний посібник для учнів 10–11 класів*. Харків, Основа.

Конет, І. М. (2006). *Тригонометрія: теорія і практика*. Кам’янець-Подільський, Абетка.

Кузьменко, В. В. (2016). *Тригонометрія: практикум з розв’язування задач*. Харків, Освіта.

Кушнір, І. А. (2006). *101 задача з тригонометрії*. Київ, Факт.

Лов’янова, І. В., & Бобилєв, Д. Є. (2015). Система професійно спрямованих умінь студентів при навчанні функціонального аналізу. *Педагогіка вищої та середньої освіти*, *46*, 45–52. DOI: https://doi.org/10.31812/educdim.v46i0.2495.

Мерзляк, А. Г., Полонський, В. Б., Рабінович, Ю. М., & Якір, М. С. (2008). *Тригонометрія*. Київ, Генеза.

Мітельман, І. М. (2019). Розвиток предметно-галузевих компетентностей учителів математики в контексті формування згорнутих дидактичних структур. У В. В. Ягоднікова (Ред.), *Професійна компетентність сучасного педагога: методологія, теорія, методика, практика* (с. 241–257). Одеса, видавець Букаєв Вадим Вікторович.

Мітельман, І. М. (2022). Формування навичок знаходження найбільших значень функцій трьох змінних під час розв’язування деяких олімпіадних задач. *Збірник наукових праць Сумського державного педагогічного університету «Актуальні питання природничо-математичної освіти»*, *2*(*20*), 64–74. DOI: 10.5281/zenodo.7426573.

Мітельман, І. М. (2023a). Оцінювання деяких виразів з модулем числа під час розв’язування задач з параметрами в дидактичному контексті підвищення кваліфікації вчителів математики. *Академічні візії* [електронне фахове наукове видання], *20*. DOI: http://dx.doi.org/10.5281/zenodo.8096614.

Мітельман, І. М. (2023b). Дидактичні ресурси agile-стратегій підготовки вчителів до роботи з математично обдарованими учнями. *Наша школа: науково-практичні студії*, *1*(*1*), 65–73. DOI: https://doi.org/10.61339/2786-6947.2023.1.286305.

Семенець, С. П. (2006). Навчальне моделювання методів доведення в шкільному курсі математики. *Математика в школі*, *9*, 12–16.

Семенець, С. П. (2016). Задачний підхід до формування навчально-математичної діяльності та розвитку математичних здібностей учнів. *Математика в рідній школі*, *4*, 14–18.

Третяк, Н. П. (2011). Тригонометричні підстановки під час розв’язування алгебріїчних задач. *Математика в школі*, *10*, 22–28.

Якиляшек, В. Й. (2001). Застосування тригонометрії до розв’язування алгебраїчних задач. *Математика*, *25–26*, 2–4.

Ясінський, В. А. (2007). Геометричні нерівності на математичних олімпіадах. *Математика в школі*, *1*, 44–53.

Ясінський, В. А. (2008). Тригонометричні підстановки на математичних олімпіадах. *Математика в школі*, *10*, 52–54; *11*, 47–52.

Andreescu, T., & Feng, Z. (2005). *103 Trigonometry Problems: From the Training of the USA IMO Team*. Boston-Basel-Berlin, Birkhäuser.

Cobb, P., Yackel, E., & McClain, K. (Eds) (2000). *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms: Perspectives on Discourse, Tools, and Instructional Design*. Mahwah, NJ, Lawrence Erlbaum Associates.

Manfrino, Radmila B., Ortega, José A. G., & Delgado, Rogelio V. (2005). *Inequalities. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas*. México, Instituto de Matemáticas de UNAM.

REFERENCES

Baranovska, H. H., & Yasinskyi, V. V. (1999). *Praktykum z matematyky. Tryhonometriia* [*Workshop in mathematics. Trigonometry*]. Kyiv, National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute» [in Ukrainian].

Haishtut, O. H., & Ushakov, R. P. (1997). *Tryhonometriia: dovidnyk-zadachnyk* [*Trigonometry: a guide and problem book*]. Kyiv, MAGISTR-S [in Ukrainian].

Honcharenko, S. U. (2008a). Fundamentalizatsiia osvity yak dydaktychnyi pryntsyp [Fundamentalisation of education as a didactic principle]. *The Way of Education*, *1*(*47*), 2–6 [in Ukrainian].

Honcharenko, S. U. (2008b). Fundamentalizatsiia profesiinoi osvity yak dydaktychnyi pryntsyp [Fundamentalisation of professional education as a didactic principle]. *Theory and practice of social systems management: philosophy, psychology, pedagogy, sociology*, *2*, 87–91 [in Ukrainian].

Hrytsyk, T. A. (2010). Dyferentsiiovane vyvchennia tryhonometrychnoho materialu u profilnii shkoli [Differentiated Study of Trigonometric Material in a Profiled School]. *Thesis of Candidate of Pedagogical Sciences*, National Pedagogical Dragomanov University [in Ukrainian].

Zadorina, O. M., Mitelman, I. M., & Papach, O. I. (2022). Pytannia pidhotovky maibutnikh uchyteliv matematyky do intehratsii v systemu pisliadyplomnoi pedahohichnoi osvity [Issues of preparing future mathematics teachers for integration into postgraduate pedagogical education system]. *New Pedagogical Thought*, *3*(*111*), 81– 90. DOI: 10.37026/2520-6427-2022-111-3-81-90 [in Ukrainian].

Zadorina, O. M., Mitelman, I. M., Motorina, V. H., & Papach, O. I. (2024). Skaffoldynh yak instrument vyperedzhalnoho navchannia rozviazuvannia uskladnenykh heometrychnykh zadach metodom koordynat ta yoho dydaktyko-metodychnoho suprovodu. [Scaffolding as a tool for accelerated learning to solve advanced geometric problems by the coordinate method and its didactic and methodical support]. *Innovative Pedagogy*, *74*, 33–45. DOI: https://doi.org/10.32782/2663-6085/2024/74.5 [in Ukrainian].

Zakharchuk, N. V. (2015). Pryntsypy vidboru zmistu osvity u konteksti fundamentalizatsiinykh protsesiv [Principles of educational content selection in the context of fundamentalisation processes]. *Bulletin of the National Aviation University. Series: Pedagogy. Psychology* [electronic research publication], *6*. URL: https://jrnl.nau.edu.ua/index.php/VisnikPP/article/view/10199 [in Ukrainian].

Karpenko, L. V. (2016). *Tryhonometriia: navchalnyi posibnyk dlia uchniv 10–11 klasiv* [*Trigonometry: a training manual for pupils of grades 10–11*]. Kharkiv, Osnova [in Ukrainian].

Konet, I. M. (2006). *Tryhonometriia: teoriia i praktyka* [*Trigonometry: theory and practice*]. Kamianets-Podilskyi, Abetka [in Ukrainian].

Kuzmenko, V. V. (2016). *Tryhonometriia: praktykum z rozviazuvannia zadach* [*Trigonometry: a practical workshop on solving problems*]. Kharkiv, Osvita [in Ukrainian].

Kushnir, I. A. (2006). *101 zadacha z tryhonometrii* [*101 trigonometry problems*]. Kyiv, Fakt [in Ukrainian].

Lovianova, I. V., & Bobyliev, D. Ye. (2015). Systema profesiino spriamovanykh umin studentiv pry navchanni funktsionalnoho analizu [The system of professionally oriented skills of students in the process of functional analysis training]. *Pedagogy of Higher and Secondary Education*, *46*, 45–52. https://doi.org/10.31812/educdim.v46i0.2495 [in Ukrainian].

Merzliak, A. H., Polonskyi, V. B., Rabinovych, Yu. M., & Yakir, M. S. (2008). *Tryhonometriia* [*Trigonometry*]. Kyiv, Heneza [in Ukrainian].

Mitelman, I. M. (2019). Rozvytok predmetno-haluzevykh kompetentnostei uchyteliv matematyky v konteksti formuvannia zghornutykh dydaktychnykh struktur [Development of subject-specific competencies of mathematics teachers in the context of the formation of convoluted didactic structures]. In V. V. Yahodnikova (Ed.), *Professional Competence of a Modern Teacher: Methodology, Theory and Practice* (pp. 241–257). Vydavets Bukaiev Vadym Viktorovych [in Ukrainian].

Mitelman, I. M. (2022). Formuvannia navychok znakhodzhennia naibilshykh znachen funktsii trokh zminnykh pid chas rozviazuvannia deiakykh olimpiadnykh zadach [Formation of skills in finding the largest values of functions of three variables in solving some olympiad problems]. *Collection of Scientific Works of Sumy State Pedagogical University «Topical Issues of Natural Science and Mathematics Education»*, *2*(*20*), 64–74. DOI: 10.5281/zenodo.7426573 [in Ukrainian].

Mitelman, I. M. (2023a). Otsiniuvannia deiakykh vyraziv z modulem chysla pid chas rozviazuvannia zadach z parametramy v dydaktychnomu konteksti pidvyshchennia kvalifikatsii vchyteliv matematyky [Estimation of some expressions with absolute values in solving problems with parameters in the didactic context of mathematics teacher professional development]. *Academic visions* [electronic research publication], *20*. DOI: http://dx.doi.org/10.5281/zenodo.8096614 [in Ukrainian].

Mitelman, I. M. (2023b). Dydaktychni resursy agile-stratehii pidhotovky vchyteliv do roboty z matematychno obdarovanymy uchniamy [Didactic resources of agile strategies for preparing teachers to work with mathematically gifted students]. *Our School: Scientific and Practical Studies*, *1*(*1*), 65–73. DOI: https://doi.org/10.61339/2786-6947.2023.1.286305 [in Ukrainian].

Semenets, S. P. (2006). Navchalne modeliuvannia metodiv dovedennia v shkilnomu kursi matematyky [Educational modelling of proving methods in a school mathematics course]. *Mathematics in School*, *9*, 12–16 [in Ukrainian].

Semenets, S. P. (2016). Zadachnyi pidkhid do formuvannia navchalno-matematychnoi diialnosti ta rozvytku matematychnykh zdibnostei uchniv [A task approach to formation of educational mathematical activity and the development of mathematical abilities of students]. *Mathematics in Native School*, *4*, 14–18 [in Ukrainian].

Tretiak, N. P. (2011). Tryhonometrychni pidstanovky pid chas rozviazuvannia alhebriichnykh zadach [Trigonometric substitutions in solving algebraic problems]. *Mathematics in School*, *10*, 22–28 [in Ukrainian].

Yakyliashek, V. Y. (2001). Zastosuvannia tryhonometrii do rozviazuvannia alhebraichnykh zadach [Application of trigonometry to solving algebraic problems]. *Mathematics*, *25–26*, 2–4 [in Ukrainian].

Yasinskyi, V. A. (2007). Heometrychni nerivnosti na matematychnykh olimpiadakh [Geometric inequalities at mathematical olympiads]. *Mathematics in School*, *1*, 44–53 [in Ukrainian].

Yasinskyi, V. A. (2008). Tryhonometrychni pidstanovky na matematychnykh olimpiadakh [Trigonometric substitutions at mathematical olympiads]. *Mathematics in School*, *10*, 52–54; *11*, 47–52 [in Ukrainian].

Andreescu, T., & Feng, Z. (2005). *103 Trigonometry Problems: From the Training of the USA IMO Team*. Boston-Basel-Berlin, Birkhäuser.

Cobb, P., Yackel, E., & McClain, K. (Eds) (2000). *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms: Perspectives on Discourse, Tools, and Instructional Design*. Mahwah, NJ, Lawrence Erlbaum Associates.

Manfrino, Radmila B., Ortega, José A. G., & Delgado, Rogelio V. (2005). *Inequalities. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas*. México, Instituto de Matemáticas de UNAM.

Igor Mitelman,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Assosiate Professor at the Department of Teaching Methodology
and Educational Content
of Odessa Regional Academy of In-Service Education,
Odesa, Ukraine
https://orcid.org/0000-0002-9817-6690

DIDACTIC AND METHODICAL ASPECTS OF TRIGONOMETRIC INTERPRETATION IN SOME TYPES OF ADVANCED ALGEBRAIC PROBLEMS

Abstract. *The implementation of academic profiling in the New Ukrainian School based on advanced mathematics in high school is determined by the needs of the state and society to intensify the educational trajectory of gifted students in the field of mathematics and its applications. The integrity of the profiled study of mathematics at the advanced level requires combining the fundamentalisation and professionalisation of education into a joint process of knowledge generalisation – concentrating educational material and didactic and methodical resources around key theoretical topics and a system of teaching problem solving. Based on the necessity of agreeing on all components of the hierarchy, systematisation and selection of the content of school education, in the preparing of future mathematics teachers, and in the in-service (postgraduate) education of teachers, the special status of trigonometric material, its significant learning and developmental potential is substantiated. At the same time, we note a decline in the level of trigonometry knowledge of school graduates, and a lack of motivation to improve it, even among students in advanced math classes, elective courses, etc. The experience of working with teachers in professional development courses and the analysis of the level of training of students of mathematics specialties in higher pedagogical education institutions also point to relevant methodical problems.*

The paper discusses an approach to the selection, actualisation, clarification, and coordination of productive subject and methodical ideas and relations of some types of algebraic problems of the olympiad and/or advanced level, which by their structural specificity allow for trigonometric interpretation (equations and systems of equations, problems for proving inequalities, and so on). The existing didactic complexes on this topic are expanded and supplemented to enhance the positive educational result – activation of the aggregate competencies acquired by students in synchronizing all content items of the school mathematics. The results of the article can contribute to the modernisation of the mathematical and methodical environment of gifted students' training, the growth of the creative potential of working and future mathematics teachers.

Key words: *mathematics teaching methodology, professional teacher development, maths gifted students, olympiad-type and advanced algebraic problems, school trigonometry, fundamentalisation and professionalisation of education content, profiling at the New Ukrainian School*.

Дата надходження до редакції 17.09.2024